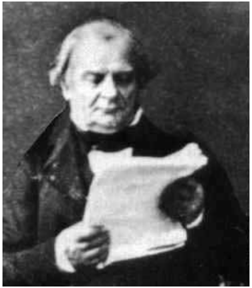
p,V-Diagramm von Luft (0130)

Ideale Gasgleichung

$$\boxed{pV = nRT}$$

$$\boxed{pV = Nk_BT}$$

Achtung! Die Temperatur T **muss** unbedingt als absolute Temperatur in Kelvin eingegeben werden!



B. Clapeyron
(1779–1864)

n = Anzahl Mol, N = Anzahl Teilchen

Universelle Gaskonstante: $R = 8.3145 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$

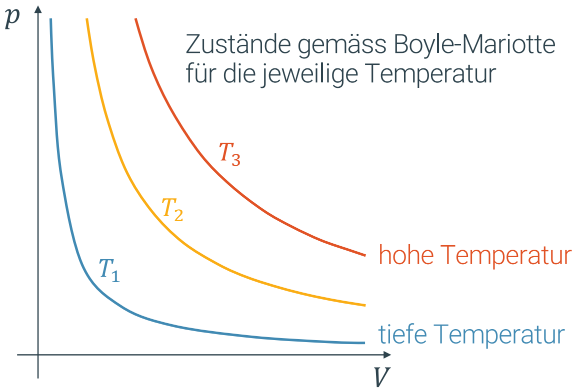
Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Die ideale Gasgleichung vereint die vielen Gasgesetze in einem Gesetz.
Sie gilt für alle Gase mit **idealem Verhalten**, **unabhängig** vom Stoff!

p,V-Diagramm für ideale Gase

Aus dem Gesetz von
Boyle-Mariotte folgt:

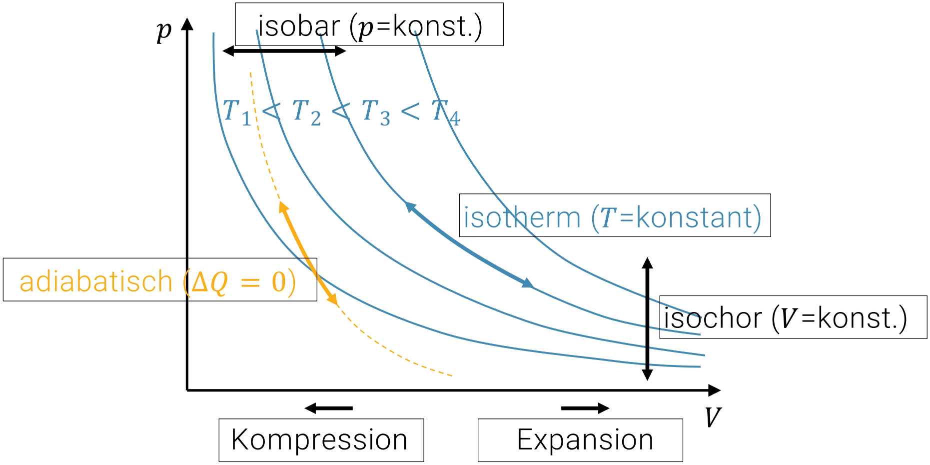
$$pV = nRT \longrightarrow p \sim \frac{1}{V}$$



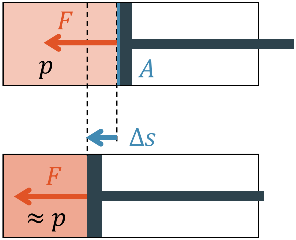
Wenn die Stoffmenge n und die **Temperatur** T **konstant** bleiben, ist der Druck p proportional zum Kehrwert des Volumens V. Die Zustände liegen auf einer Hyperbel im p,V-Diagramm: **Isotherme**

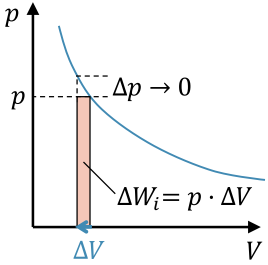
Zustandsänderungen im p,V-Diagramm

isobar, Kompression, Expansion, isochor, isotherm, adiabatisch



Infinitesimale Kompression eines Fluids





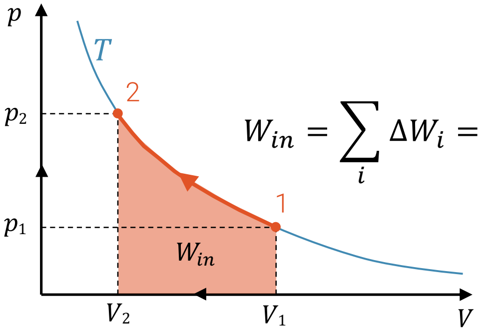
$$\Delta W_i = F \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta s$$
$$= p \cdot (A \cdot \Delta s) = p \cdot \Delta V$$

$$\Delta W_i = p \cdot \Delta V$$

Das Zusammendrücken des Fluids um eine kleine Strecke Δs bzw. um ein kleines Volumen ΔV bewirkt eine kleine Druckerhöhung, die wir vernachlässigen.

Die **Arbeit W**, die am Fluid verrichtet wird, entspricht dem dünnen Flächenstreifen im p,V-Diagramm.

Isotherme Kompression

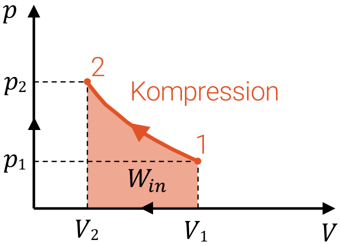


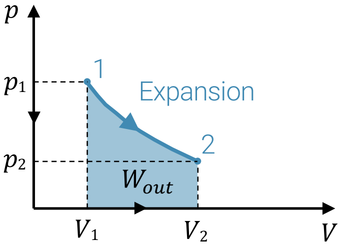
$$W_{in} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i p(V_i)\,\Delta V \;\; \rightarrow W_{in} = -\int p(V)dV$$

Bei der **isothermen Kompression** (T = konstant) wird Arbeit am Fluid verrichtet, d.h. das Fluid nimmt Arbeit W_{in} auf.

Die **konstante Temperatur** verrät uns aber zusätzlich, dass die innere Energie während der Kompression sich nicht geändert hat ($\Delta U = 0$).

Allgemeine Kompression und Expansion





Bei der Kompression wird das Volumen verkleinert und der Druck steigt. Die Arbeit W_{in}, die für die Kompression nötig ist, entspricht der **Fläche unter der Zustandsänderung** im p,V-Diagramm.

Expandiert das Fluid, so nimmt das Volumen zu und der Druck sinkt. Das Fluid gibt dabei die Arbeit W_{out} ab, die wieder der Fläche unter der Zustandsänderung entspricht.

Aufgabe: In dieser Aufgabe werden wir Zustandsänderungen in einem p,V-Diagramm zeichnen und berechnen. Zuerst ermitteln wir die Punkte, die wir für die Zeichnung von zwei Isothermen benötigen.

a) Zeige, dass 1 Mol Luft bei einem Druck von 1 bar und bei Umgebungstemperatur von 20°C 24.4 l beträgt.

b) Vervollständige die folgende Tabelle für die Isotherme T_1 = 20°C und berechne die Drücke für 1 Mol Luft für verschiedene Volumina

$0.005\,m^3$

$p = \frac{nRT}{V}$

Volumen (l)	5	10	15	20	24.4	30	35
Druck (bar)	4.88	2.44	1.63	1.22	1	0.81	0.70

c) Benutze für die zweite Isotherme T_2 = 100°C die folgende Tabelle:

Volumen (l)	5	10	15	20	24.4	30	35
Druck (bar)	6,21	3.10	2.07	1.55	1.27	1.03	0.84

a) $pV = nRT \quad | :p$

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1\,mol \cdot 8.3145\,\frac{J}{mol\,K} \cdot \overbrace{293.15\,K}^{20^\circ C}}{10^5\,\frac{N}{m^2}}$$

$$V = 0.0244\,\frac{\cancel{mol}\,\cancel{J}^{\,\cancel{N}m}\,\cancel{K}\,m^2}{\cancel{mol}\,\cancel{K}\,\cancel{N}} = 0.0244\,m^3$$

$$\underline{V = 24.4\,L}$$

d) Zeichne die beiden Isothermen in einem p,V-Diagramm. Wähle eine geeignete Skala, damit das Diagramm möglichst gross wird.

e) Zeichne die folgenden drei Zustandsänderung ein:

   i) isochore Zustandsänderung bei 30 l von T_1 auf T_2

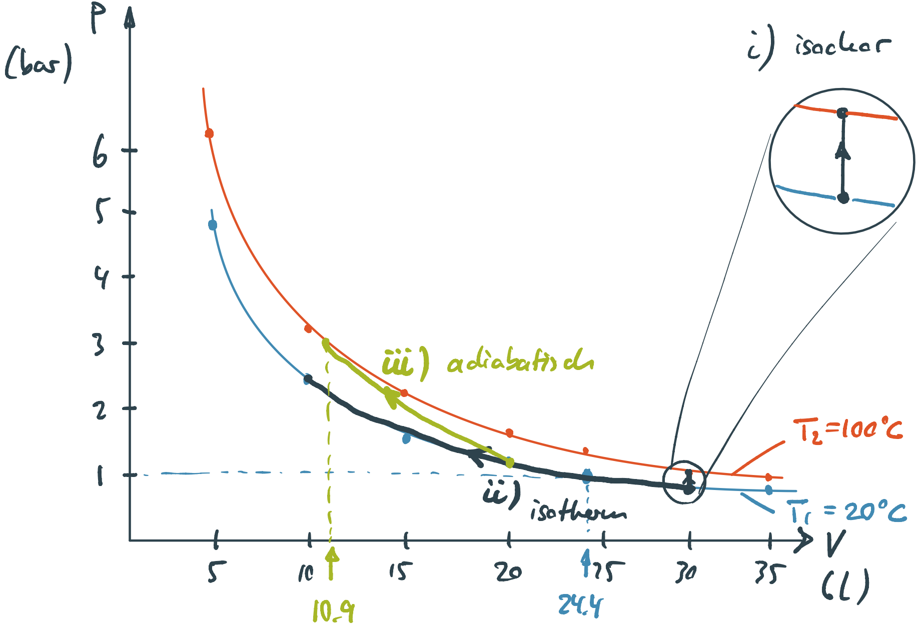
   ii) isotherme Kompression bei T_1 von 30 l auf 10 l

   iii) adiabatische Kompression von 20 l bei T_1 auf T_2. Berechne V_2 mit Hilfe des folgenden Gesetzes und $\kappa = 1.4$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$$

f) Berechne die Arbeit, die für die Zustandsänderung ii) aufgebracht werden muss. Benutze dazu folgende Formel (Tipp: Arbeite mit SI-Einheiten):

$$W_{in} \quad = \quad -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \quad = \quad nRT \cdot \big(\ln(V_1) - \ln(V_2)\big)$$



p
(bar)
6
5
4
3
2
1
iii) adiabatisch
ii) isotherm
i) isochor V=konstant
T2=100°C
T1 = 20°C
V
(l)
5
10
15
20
25
30
35
10.9
24.4

iii) $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$

$T_1 = 20°C = 293.15K$
$T_2 = 100°C = 373.15K$
$V_1 = 20l = 0.02m^3$
$V_2 = ?$
$\kappa = 1.4$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} \quad \Big| \cdot V_2^{\kappa-1}$$

$$V_2^{\kappa-1} \cdot \frac{T_2}{T_1} = V_1^{\kappa-1} \quad \Big| \cdot T_1 \ : T_2$$

$$V_2^{\kappa-1} = \frac{T_1}{T_2} \cdot V_1^{\kappa-1} \quad \Big| \ \square^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} \cdot V_1^{\kappa-1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0.164293^{\frac{1}{0.4}} = 0.011m^3$$

$$= \underline{10.9l}$$

f) ii) isotherm von V_1 zu V_2 komprimieren

$V_1 = 30\,l$, $V_2 = 10\,l$

$$W_{in} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = -nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\,dV$$

$$pV = nRT \rightarrow p(V) = \frac{nRT}{V}$$

$$= -nRT\left(\ln(V_2) - \ln(V_1)\right)$$

$$= nRT\left(\ln(V_1) - \ln(V_2)\right)$$

$$W_{in} = 1\,mol \cdot 8.3145\,\frac{J}{mol\,K} \cdot 293.15\,K \cdot \left(\ln(0.03) - \ln(0.01)\right) \quad [m^3]$$

$$W_{in} = 2677\,J = \underline{2.7\,kJ}$$