Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_x & & b_x \\ a_y & & b_y \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{pmatrix}$$

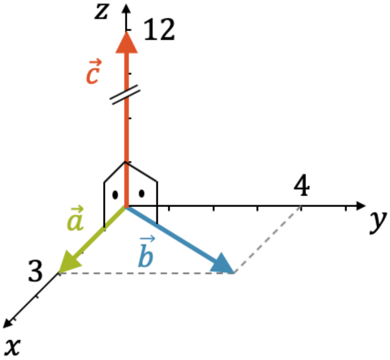
$$\begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ 2 & & 5 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt steht **senkrecht auf beiden ursprünglichen Vektoren**, die im Produkt stehen:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\\ 3\\ 0\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\\ 3\\ 4\end{array} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}$$

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**: Eine Umkehrung der Reihenfolge kehrt das Vorzeichen um:

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \\ 1 & & -1 \\ 2 & & 0 \end{array} = \begin{pmatrix}2\cdot 3 - 3\cdot 0\\ 3\cdot(-1) - 1\cdot 3\\ 1\cdot 0 - 2\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \\ -1 & & 1 \\ 0 & & 2 \end{array} = \begin{pmatrix}0\cdot 3 - 3\cdot 2\\ 3\cdot 1 - (-1)\cdot 3\\ (-1)\cdot 2 - 0\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\-2\end{pmatrix}$$

Distributivgesetz für das Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Assoziativgesetz für die Kombination von Zahlenprodukt und Vektorprodukt: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Vektoren, λ ist ein Skalar, d.h. eine Zahl:

Zahl

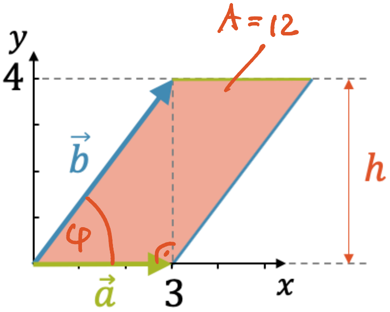
$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} \\ &= \vec{a} \times (\lambda \vec{b})\end{aligned}$$

Die Reihenfolge im Vektorprodukt bleibt erhalten ($\vec{a}$ vor $\vec{b}$), während die Reihenfolge für das Zahlenprodukt keine Rolle spielt (λ vor $\vec{a}$ oder $\vec{a}$ vor λ).

$\lambda = 2$ Zahlen: $2 \cdot (a \cdot b) = (2a) \cdot b = a \cdot (2b)$

Der **Betrag des Vektorprodukt** (=Fläche des Parallelogramms) kann mit den Beträgen der ursprünglichen Vektoren und dem **Sinus des Zwischenwinkels** berechnet werden:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \quad = \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = 12$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{|\vec{b}|} \rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \Bigg| \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Kollineare Vektoren bilden im Vektorprodukt den Nullvektor:

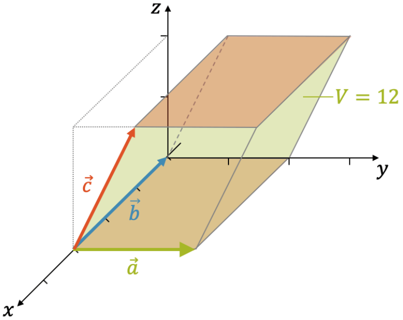
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ oder } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

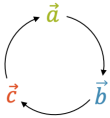
Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ (in dieser Reihenfolge):

$$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] \;=\; \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

Das **Volumen des Spats**, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird, entspricht dem (positiven) Betrag des Spatprodukts:

$$V \;=\; \left|[\,\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\,]\right|$$





$$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = [\,\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\,] = [\,\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\,]$$

$$= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Zwei kollineare Vektoren oder **drei komplanare Vektoren** führen zu einem verschwindenden Spat-produkt:

$$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0$$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 Berechne die folgenden Vektorprodukte.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{e} \times (\vec{b} \times \vec{d})$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{d})$

d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$

e) $(\vec{a} \times \vec{e}) + (\vec{d} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\\1\\0\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\\3\\5\end{array} = \begin{pmatrix}0-10\\6-0\\5-0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-10\\6\\5\end{pmatrix}}$

b) $\vec{e} \times (\vec{b} \times \vec{d}) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\\7\\0\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}-10\\6\\-70\end{pmatrix}\\-10\\6\end{array} = \underline{\begin{pmatrix}0\\490\\42\end{pmatrix}}$

$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\\3\\5\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}11\\-5\\-2\end{pmatrix}\\11\\-5\end{array} = \begin{pmatrix}-10-0\\0+6\\-15-55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\6\\-70\end{pmatrix}$

c) $$\underbrace{(\vec{a}+\vec{b})}_{\begin{pmatrix} 1+3 \\ 0+5 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}} \times \underbrace{(\vec{c}-\vec{d})}_{\begin{pmatrix} 2-11 \\ 2-(-5) \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 4 \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -9 \\ 7 \end{array} = \begin{pmatrix} -14 \\ -18 \\ 28+45 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -14 \\ -18 \\ 73 \end{pmatrix}}$$

d) $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus a)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ -10 \\ 6 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ -10 \\ 6 \end{array} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

e)

$$\vec{a} \times \vec{e} = \begin{matrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \times \begin{matrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 7 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \times \vec{c} = \begin{matrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 11 \\ -5 \end{matrix} \times \begin{matrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 2 \\ 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 10+4 \\ -4+22 \\ 22+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{e}) + (\vec{d} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0+14 \\ 14+18 \\ 0+32 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 32 \end{pmatrix}}$$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

b) Zeige, dass $\vec{c}$ sowohl auf $\vec{a}$, wie auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

c) Zeige, dass das Vektorprodukt immer senkrecht auf dem ersten Vektor des Produkts steht, indem du die beiden folgenden allgemeinen Vektoren benutzt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

a) $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 3 \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ -1 \\ 10 \end{array} = \begin{pmatrix} 20+20 \\ 2-12 \\ 30+5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix}}$$

b) $$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 40 \cdot 3 + (-10) \cdot 5 + 35 \cdot (-2)$$

$$= 120 - 50 - 70 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{c} \perp \vec{a}}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 40 \cdot (-1) + (-10) \cdot 10 + 35 \cdot 4$$

$$= -40 - 100 + 140 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{c} \perp \vec{b}}$$

c)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$= a_y b_z a_x - a_z b_y a_x + a_z b_x a_y - a_x b_z a_y + a_x b_y a_z - a_y b_x a_z$$

$= 0$ $= 0$ $= 0$

$$= 0 \rightarrow \underline{\vec{c} \perp \vec{a}}$$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 3

Aufgabe 3 Benutze die algebraischen Eigenschaften des Vektorprodukts für die folgenden Aufgaben und löse sie <u>ohne</u> Komponentenschreibweise.

a) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a}\right)$

b) $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) \times \left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

c) $\left(2\vec{c} \times \vec{a}\right) + \left(2\vec{a} \times \vec{c}\right)$

d) $\vec{u} \times \left[\left(\vec{v}+\vec{w}\right) \times 2\left(\vec{v}+\vec{w}\right)\right]$

a) $(\vec{a}+\vec{b}) \times (3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a})$

$(\vec{a}+\vec{b}) \times (2\vec{a}+2\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b}) \times 2\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= \underline{\vec{0}}$

$$\vec{v} \times \lambda\vec{v} = \lambda\cdot\underbrace{(\vec{v}\times\vec{v})}_{\vec{0}}$$

b) $(2\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}-2\vec{b}) = \underbrace{\cancel{2\vec{a}\times\vec{a}}}_{\vec{0}} + 2\vec{a}\times(-2\vec{b}) + (-\vec{b})\times\vec{a} + \underbrace{\cancel{(-\vec{b})\times(-2\vec{b})}}_{\vec{0}}$

$= 2\vec{a}\times(-2\vec{b}) + (-\vec{b})\times\vec{a}$

$= (-4)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) - \underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})}_{-(\vec{a}\times\vec{b})}$

$= (-4)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{b}) = \underline{(-3)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$

c) $(2\vec{c} \times \vec{a}) + (2\vec{a} \times \vec{c})$

$2 \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$

$(-2) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \underline{\vec{0}}$

d) $\vec{u} \times [(\vec{v} + \vec{w}) \times 2(\vec{v} + \vec{w})]$

$\vec{u} \times 2 \cdot [(\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{v} + \vec{w})] = \underline{\vec{0}}$

$$\underbrace{\underbrace{(\vec{v} + \vec{w})}_{\vec{a}} \times \underbrace{(\vec{v} + \vec{w})}_{\vec{a}}}_{= \vec{0}}$$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 4

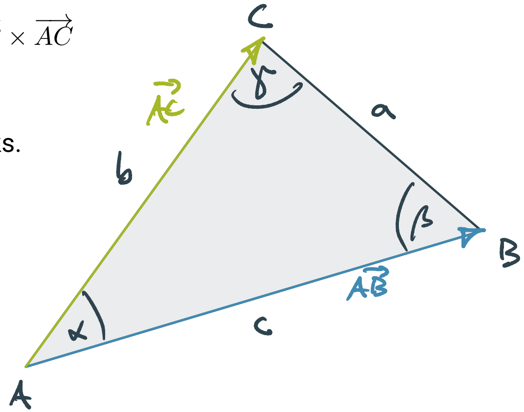
Aufgabe 4 Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks im Raum:

$$A(2,3,5), \quad B(-1,-1,0), \quad C(10,3,-4)$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

b) Berechne die Winkel α und β.

c) Berechne die Fläche des Dreiecks.



a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-3 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 3-3 \\ -4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

B A

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -36-0 \\ 40+27 \\ 0-32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & & 8 \\ 4 & & 0 \end{matrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ 67 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 36 \\ -67 \\ 32 \end{pmatrix}}$$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\alpha) \quad | : |\vec{AB}| \; : |\vec{AC}|$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{21}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{145}} \qquad \cos^{-1}\left(\frac{21}{\sqrt{50}\sqrt{145}}\right) = \underline{\alpha = 75.72°}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-9)^2} = \sqrt{64+81} = \sqrt{145}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = -24 - 0 + 45$$
$$= 21$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 10+1 \\ 3+1 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 33+16-20$$

$$= 29$$

$$|\vec{BA}| = |\vec{AB}| = \sqrt{50} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{11^2+4^2+(-4)^2} = \sqrt{153}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} \rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{29}{\sqrt{50}\sqrt{153}}\right)$$

$$\underline{\beta = 70.64^\circ}$$

Berechnung von β mit Vektorprodukt:

$$|\vec{BA} \times \vec{BC}| = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \sin(\beta) \rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{BA} \times \vec{BC}|}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}\right)$$

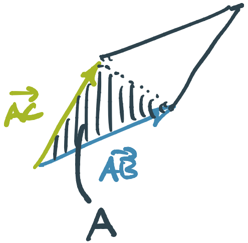
$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16-20 \\ 55+12 \\ 12-44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 67 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 11 \\ 4 & 4 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{36^2 + 67^2 + 32^2} = \sqrt{6809} \\ |\vec{BA}| = \sqrt{50} \quad |\vec{BC}| = \sqrt{153} \end{array}\right\} \beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6809}}{\sqrt{50}\sqrt{153}}\right)$$

$$\underline{\beta = 70.64^\circ}$$

c) $A = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 36 \\ -67 \\ 32 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 67^2 + 32^2}$



$A = 41.26$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 5

Aufgabe 5 Wir haben einen gerade stehenden Würfel mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung und Seitenlänge $s = 4$.

a) Zeichne den Würfel im dreidimensionalen Koordinatensystem.

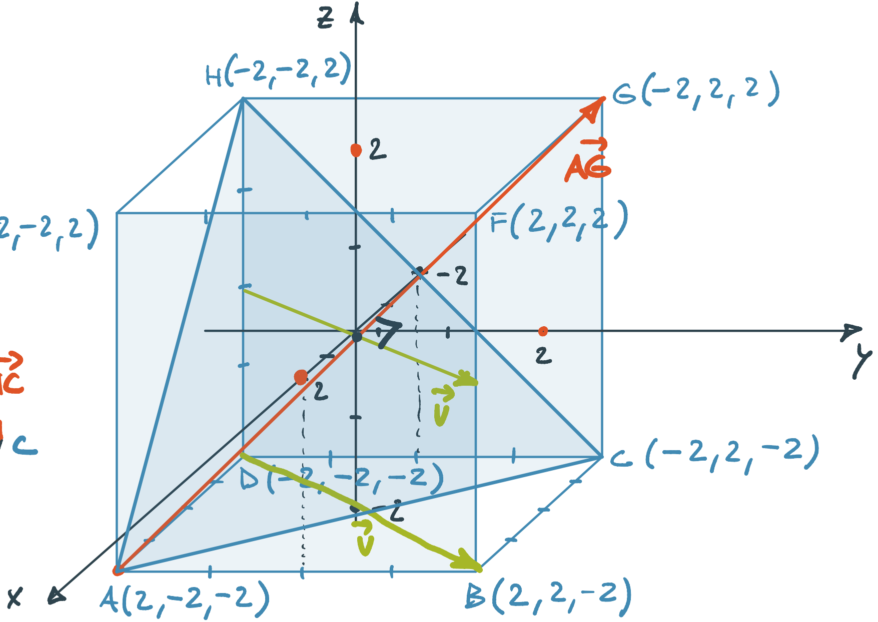
b) Beschrifte die Ecken A bis H und bestimme deren Koordinaten.

c) Welchen Zwischenwinkel hat die Raumdiagonale durch die Ecke $(2, -2, -2)$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$?

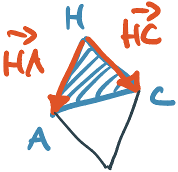
d) Berechne die Fläche der Schnittebene durch den Würfel, die drei Seitenflächen diagonal schneidet.

e) Berechne das Volumen des Würfels mit Hilfe des Spatprodukts.

a)
b)



z
y
x
H(-2,-2,2)
G(-2,2,2)
E(2,-2,2)
F(2,2,2)
C(-2,2,-2)
D(-2,-2,-2)
A(2,-2,-2)
B(2,2,-2)
$\vec{AG}$
$\vec{v}$
$\vec{v}$
2
2
2
-2
-2



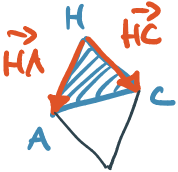
H
A
C
$\vec{HA}$
$\vec{HC}$

c) $\vec{AG} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -2 - 2 \\ 2 - (-2) \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ G & & A \end{matrix}\end{array} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{AG} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -16 + 16 + 0 = 0$$

$\rightarrow \underline{\vec{v} \perp \vec{AG} \quad (90°)}$

d)



$\vec{HA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{HC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

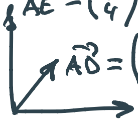
$$\vec{HA} \times \vec{HC} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 4 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 4 \end{array} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{HA} \times \vec{HC}| = \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = \sqrt{3 \cdot 16^2} = 16\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Fläche: $\underline{8\sqrt{3}}$

e)

$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{AB}\ \vec{AD}\ \vec{AE}] = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} \times \vec{AE})$$

$$\vec{AD} \times \vec{AE} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -4 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AD} \times \vec{AE}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{64} = 4^3$$

$s = 4$

Vektor- und Spatprodukt (5044)

Aufgabe 6

Aufgabe 6 Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ kollinear sind.

b) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ komplanar sind.

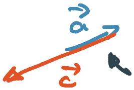
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}$

kollinear, wenn $\vec{a} = k_1 \cdot \vec{c}$ bzw. $\vec{c} = k_2 \cdot \vec{a}$

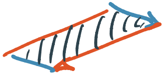
$(-2)\cdot\vec{a} = \vec{c}$ $\quad\quad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind <u>kollinear</u>

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\\2\\1\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}\\-4\\-2\end{array} = \begin{pmatrix}6-6\\12-12\\-4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

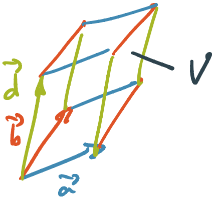
$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{c}$ <u>kollinear</u>

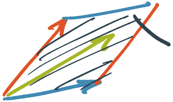


Parallelogramm
hat <u>Fläche null</u>



b)





komplanar:
flaches Parallelogramm
(Volumen null)

$$[\vec a\,\vec b\,\vec d] = \vec a\cdot(\vec b\times\vec d) = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\17\\5\end{pmatrix} = -2+17-15$$

$$= 0$$

$$\vec b\times\vec d = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}12\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\17\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}5 & 12\\ 0 & 1\end{matrix}$$

$\rightarrow$ $\vec a$, $\vec b$ und $\vec d$ sind <u>komplanar</u>