Das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren im x, y-Koordinatensystem, wird berechnet, indem die zugehörigen Komponenten miteinander multipliziert und dann addiert werden. Das Ergebnis ist ein Skalar (Zahl).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y)$$

Bei dreidimensionalen Vektoren kommt analog das Produkt der z-Komponente hinzu:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

$$= 4 + 10 + 18$$

$$= \underline{32}$$

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Produkt der beiden Vektorlängen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ und dem Kosinus des Zwischenwinkels φ, der zwischen den beiden Vektoren eingeschlossen ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \quad = \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$\vec{a}, \vec{b}$ gleich gerichtet	$\varphi = 0°$	$\cos(0°) = 1$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$
$\vec{a}, \vec{b}$ senkrecht	$\varphi = 90°$	$\cos(90°) = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$\vec{a}, \vec{b}$ entgegengesetzt	$\varphi = 180°$	$\cos(180°) = -1$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = -2 + 2 = \underline{0}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{0}{4}$

Skalarprodukt (5035)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 Finde die Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + \cancel{3\cdot 0} = -1+2 \neq 0 \rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1\cdot(-3) + \cancel{2\cdot 0} + 3\cdot 1 = -3+3 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{a} \perp \vec{c}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) + \cancel{3\cdot 0} = 4-4 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{a} \perp \vec{d}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 1\cdot 5 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 = 5+10+21 \neq 0 \rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{e}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-1)\cdot(-3) + \cancel{1\cdot 0} + \cancel{0\cdot 1} \neq 0 \rightarrow \vec{b} \not\perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = (-1)\cdot 4 + 1\cdot(-2) + \cancel{0\cdot 0} \neq 0 \rightarrow \vec{b} \not\perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{e} = (-1)\cdot 5 + 1\cdot 5 + \cancel{0\cdot 7} = -5+5 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{b} \perp \vec{e}}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (-3)\cdot 4 + \cancel{0\cdot(-2)} + \cancel{1\cdot 0} \neq 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = (-3)\cdot 5 + \cancel{0\cdot 5} + 1\cdot 7 \neq 0$$

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = 4\cdot 5 - 2\cdot 5 + \cancel{0\cdot 7} \neq 0$$

Skalarprodukt (5035)

Aufgabe 2

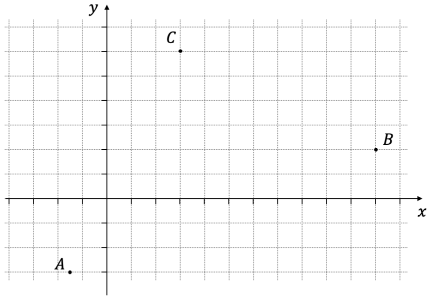
Aufgabe 2 Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.

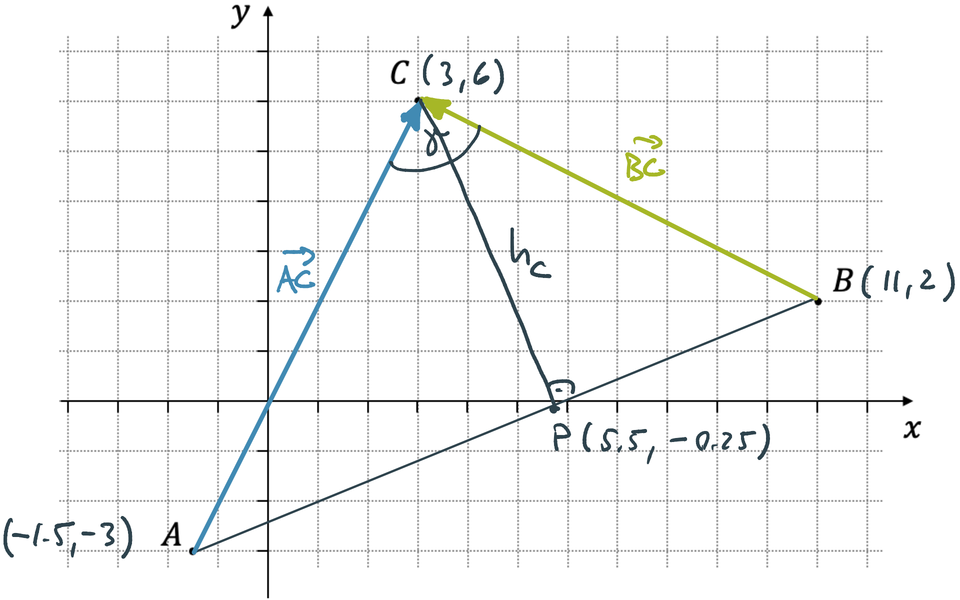
a) Zeige algebraisch, dass das Dreieck einen rechten Winkel hat und benenne ihn. Zeichne danach das Dreieck und überprüfe dein Ergebnis.

b) Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{CP}$ steht senkrecht auf der Seite c. Finde die Komponente v_y des Vektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ v_y \end{pmatrix}$$

c) Finde die Koordinaten des Punkts P, wo die Höhe h_c auf c steht.





y
x
C (3,6)
B (11,2)
A
(-1.5,-3)
P (5.5, -0.25)
$\vec{AC}$
$\vec{BC}$
h_c
γ

a)

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ C}}{3} - (-1.5) \\ 6 - \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{(-3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1.5 \\ 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 - 11 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.5 \cdot (-8) + 9 \cdot 4$$

$$= -36 + 36 = 0 \Rightarrow \underline{\gamma = 90^\circ}$$

b)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{11} - (-1.5) \\ 2 - \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{(-3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11+1.5 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 12.5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ v_y \end{pmatrix} = 0$$

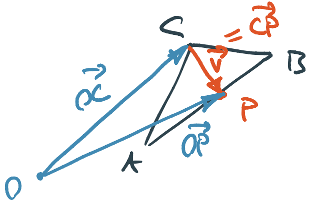
$$\underbrace{12.5 \cdot 2.5}_{} + 5v_y = 0$$

$$31.25 + 5v_y = 0$$

$$5v_y = -31.25$$

$$\underline{v_y = -6.25}$$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} = \vec{CP}$



$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2.5 \\ 6-6.25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{P(5.5, -0.25)}$$

Skalarprodukt (5035)

Aufgabe 3

Aufgabe 3 Finde die Vektoren, die einen Winkel von $30°$ einschliessen. Benutze $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hinweis: Achte auf die Längen der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ $\quad |\vec{b}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ $\quad |\vec{c}| = 1$ $\quad |\vec{d}| = 1$ $\quad |\vec{e}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{1/2}{1 \cdot \sqrt{7}/2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✗

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ $\Rightarrow \underline{\varphi = 30° \; (\vec{a}, \vec{c})}$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{\varphi = 30° \; (\vec{a}, \vec{d})}$

$\vec{a} \cdot \vec{e} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{3/4 + \sqrt{3}/4}{1 \cdot \sqrt{6}/2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✗

$\vec{b} \perp \vec{c}$ ✗ $\quad \vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{7}/2 \cdot 1}$ ✗

$$\vec{b} \cdot \vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{7}/2 \cdot \sqrt{6}/2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \times$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2} \quad (\rightarrow \varphi = 60^\circ) \quad \times$$

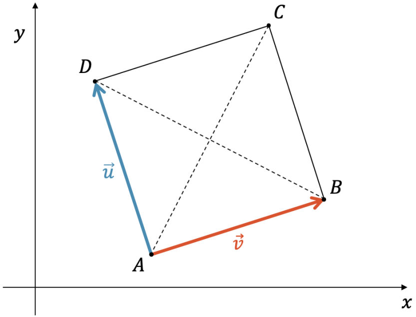
$$\vec{c} \cdot \vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot \sqrt{6}/2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \times$$

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}/4 + 3/4}{1 \cdot \sqrt{6}/2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \times$$

Skalarprodukt (5035)

Aufgabe 4

Aufgabe 4 Das Quadrat $ABCD$ wird durch die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt.



a) Berechne die Komponenten der beiden Diagonalvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ und überprüfe die Tatsache, dass beide Diagonalen eines Quadrats senkrecht aufeinander stehen.

b) Zeige, dass die Diagonalen immer senkrecht aufeinander stehen, unabhängig von der Lage und Neigung des Quadrats im Koordinatensystem. Wiederhole deine vorhergehende Rechnung, jedoch dieses Mal rein algebraisch und ohne mit Komponenten zu arbeiten.

a)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = -32 + 32 = 0 \Rightarrow \underline{\varphi = 90^\circ}$$

$$\underline{\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}}$$

b) $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{BD} = \vec{u} - \vec{v}$

$$\underline{\vec{AC} \cdot \vec{BD}} = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v})$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \cancel{\vec{u}\vec{v}} + \cancel{\vec{u}\vec{v}} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= |\vec{u}|\cdot|\vec{u}| - |\vec{v}|\cdot|\vec{v}| = u^2 - v^2 = \underline{0}$$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot \underbrace{\cancel{\cos(0°)}}_{=1}$

$u = v$

(Quadrat: Seitenlängen sind gleich)

$$\Rightarrow \underline{\vec{AC} \perp \vec{BD}}$$