Vektor- und Spatprodukt

Aufgabe 1 Berechne die folgenden Vektorprodukte.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{e} \times (\vec{b} \times \vec{d})$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{d})$

d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$

e) $(\vec{a} \times \vec{e}) + (\vec{d} \times \vec{c})$

Aufgabe 2 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

b) Zeige, dass $\vec{c}$ sowohl auf $\vec{a}$, wie auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

c) Zeige, dass das Vektorprodukt immer senkrecht auf dem ersten Vektor des Produkts steht, indem du die beiden folgenden allgemeinen Vektoren benutzt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Benutze die algebraischen Eigenschaften des Vektorprodukts für die folgenden Aufgaben und löse sie <u>ohne</u> Komponentenschreibweise.

a) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a})$

b) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$

c) $(2\vec{c} \times \vec{a}) + (2\vec{a} \times \vec{c})$

d) $\vec{u} \times \left[(\vec{v} + \vec{w}) \times 2(\vec{v} + \vec{w})\right]$

Aufgabe 4 Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks im Raum:

$$A(2,3,5), \quad B(-1,-1,0), \quad C(10,3,-4)$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

b) Berechne die Winkel α und β.

c) Berechne die Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 5 Wir haben einen gerade stehenden Würfel mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung und Seitenlänge $s = 4$.

a) Zeichne den Würfel im dreidimensionalen Koordinatensystem.

b) Beschrifte die Ecken A bis H und bestimme deren Koordinaten.

c) Welchen Zwischenwinkel hat die Raumdiagonale durch die Ecke $(2,-2,-2)$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$?

d) Berechne die Fläche der Schnittebene durch den Würfel, die drei Seitenflächen diagonal schneidet.

e) Berechne das Volumen des Würfels mit Hilfe des Spatprodukts.

Aufgabe 6 Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ kollinear sind.

b) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ komplanar sind.