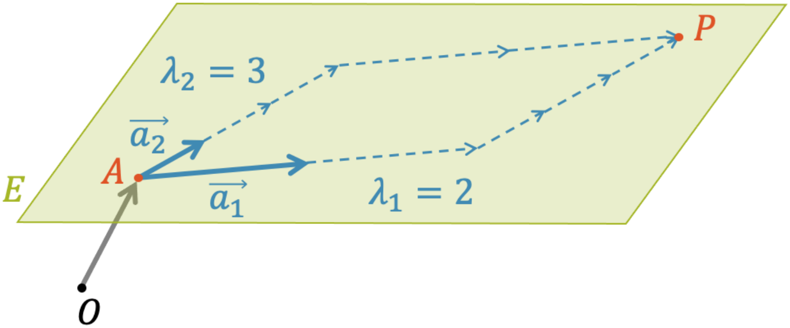


P
$\lambda_2 = 3$
$\overrightarrow{a_2}$
A
E
$\overrightarrow{a_1}$
$\lambda_1 = 2$
O

Alle Punkte P einer Ebene E mit dem Punkt $A \in E$ kann beschrieben werden durch die folgende Gleichung der Ebene:

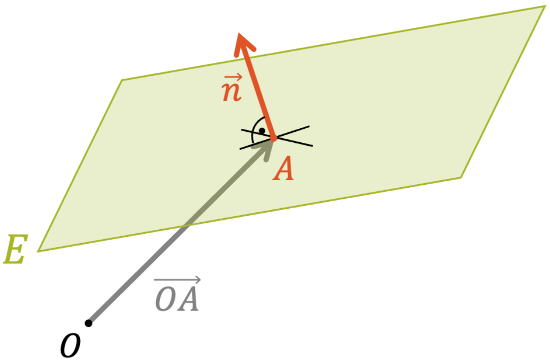
$$E\colon\ \ \overrightarrow{OP} \;=\; \overrightarrow{OA} + \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2}$$

$$E\colon\ \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,x} \\ a_{1,y} \\ a_{1,z} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{2,x} \\ a_{2,y} \\ a_{2,z} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{OA}$ heisst wieder Stützvektor, da er die Position der Ebene fixiert. Die beiden Richtungsvektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ spannen die Ebene auf und dürfen deshalb nicht kollinear sein, da sie sonst nur eine Gerade aufspannen würden. Wir verlangen deshalb:

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} \;\neq\; \vec{0}$$

Die reellen Parameter λ_1 und λ_2 (positiv oder negativ) bestimmen die Linearkombination von $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$. Aus ihr folgt, welcher Punkt P von A aus erreicht wird, analog zur Gleichung einer Geraden.


$\vec{n}$
A
E
$\overrightarrow{OA}$
O

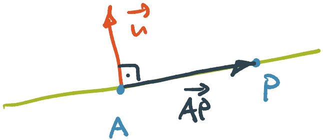
Die **Normalform** einer Ebene wird ausgedrückt mit dem **Stützvektor** $\overrightarrow{OA}$, der zum Startpunkt A auf der Ebene zeigt und dem **Normalvektor** $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene E steht. Die Gleichung gilt für alle Punkte P auf der Ebene:

$$E: \quad \vec{n} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}}_{\overrightarrow{AP}}) = 0$$

In Komponentenschreibweise erhalten wir:

$$E: \quad \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Da P für alle möglichen Punkte auf der Ebene steht, sind seine Koordinaten $P(x, y, z)$.



Die **Koordinatenform** einer Ebene ist die ausmultiplizierte Normalform:

$$E: \quad a \cdot x \; + \; b \cdot y \; + \; c \cdot z \; + \; d \;\; = \;\; 0$$

Dabei entsprechen die Koeffizienten $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ und $d = -\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad A(2,2,-1) \in E$

$\vec{n} \perp E$

$\Bigg\}$ Normalform: $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (x-2) + \cancel{0 \cdot (y-2)} + 3 \cdot (z+1) = 0$$

$$x + 3z - 2 + 3 = 0$$

$$\underline{E: \; x + 3z + 1 = 0}$$

In der **Normalform** und der **Koordinatenform** können die Koordinaten des Punkts $P(x, y, z)$ einfach in die Ebenengleichung eingesetzt werden. Ist die Gleichung erfüllt, d.h. ist das Resultat tatsächlich null, ist der Punkt in der Ebene.

$E: x + 3z + 1 = 0$

$P(3, 2, -\frac{4}{3}) \in E$

Kontrolle: $3 + 3 \cdot (-\frac{4}{3}) + 1 \overset{?}{=} 0$

$3 - 4 + 1 = 0$ ✓

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-2 \\ -4/3+1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$ ✓

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot 1 + \cancel{0 \cdot 0} - 3 \cdot \frac{1}{3}$

$= 1 - 1 = 0$ ✓

Gehört ein Punkt P zur Ebene E, gibt es eine ganz bestimmte Einstellung der beiden Parameter λ_1 und λ_2, die mit der Ebenengleichung zum Punkt P führt:

$$\overrightarrow{OA} \; + \; \lambda_1 \cdot \vec{a_1} \; + \; \lambda_2 \cdot \vec{a_2} \; \overset{!}{=} \; \overrightarrow{OP}$$

Diese Vektorgleichung ist ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (λ_1 und λ_2). Es ist überbestimmt, d.h. **zwei Gleichungen** reichen für die Bestimmung der Lösung (λ_1, λ_2).

$$\begin{cases} a_{1,x}\,\lambda_1 + a_{2,x}\,\lambda_2 = OP_x - OA_x \\ a_{1,y}\,\lambda_1 + a_{2,y}\,\lambda_2 = OP_y - OA_y \\ a_{1,z}\,\lambda_1 + a_{2,z}\,\lambda_2 = OP_z - OA_z \end{cases}$$

Anschliessend wird die Erfüllung der **dritten Gleichung** durch die gefundene Lösung (λ_1, λ_2) überprüft:
Erfüllen (λ_1, λ_2) die dritte Gleichung ist $P \in E$. Ist die dritte Gleichung durch (λ_1, λ_2) nicht erfüllt, gilt $P \notin E$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad P(3, 2, -\tfrac{4}{3}) \overset{?}{\in} E$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1 + \cancel{0 \cdot \lambda_1} + 3 \cdot \lambda_2 &= 3 \\ 2 + 1 \cdot \lambda_1 + \cancel{0 \cdot \lambda_2} &= 2 \\ \cancel{0} + \cancel{0 \cdot \lambda_1} - 1 \cdot \lambda_2 &= -4/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x:&\quad 3\lambda_2 = 4 &&\rightarrow \lambda_2 = \tfrac{4}{3} \\ y:&\quad \lambda_1 = 0 &&\rightarrow \lambda_1 = 0 \\ z:&\quad -\lambda_2 = -\tfrac{4}{3} &&\rightarrow \lambda_2 = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 0 + 4 \\ 2 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} \checkmark$$

$P \in E$

Gleichung einer Ebene (5049)

Aufgabe 1

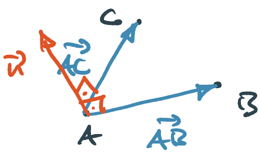
Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden Elemente der Ebene E.
Stelle für sie eine gültige Parameterform, die Normalform und die Koordinatenform auf.

a) $A(-1,0,8),\ B(2,2,0),\ C(-1,1,3)$ und $A,B,C \in E$

b) $A(0,0,3),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \in E$

c) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A(2,2,2)$ und $A, \vec{a_1}, \vec{a_2} \in E$

a) $A(-1,0,8)$, $B(2,2,0)$, $C(-1,1,3)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 1-0 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+8 \\ 0+15 \\ 3-0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-8 \end{pmatrix} = (-2)\cdot(x+1) + 15\cdot y + 3\cdot(z-8) = 0$$

$$E: -2x + 15y + 3z - 26 = 0$$

b) $A(0,0,3)$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + \cancel{0 \cdot (z - 3)} = 0$$

$$E: x + y = 0$$

$B(0,0,0) \in E$

$C(1,-1,1) \in E$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -1-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A(2,2,2)$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ -3-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$\begin{matrix} 3 & & 1 \\ -1 & & 0 \end{matrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$-1 \cdot (x-2) - 6(y-2) + 1 \cdot (z-2) = 0$$

$$-x - 6y + z \cancel{+2} + 12 \cancel{-2} = 0$$

$$E: -x - 6y + z + 12 = 0$$

Gleichung einer Ebene (5049)

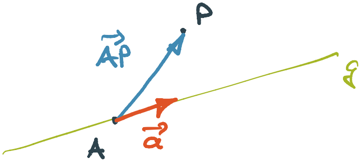
Aufgabe 2

Aufgabe 2 Finde die Ebene E, die sowohl den Punkt P beinhaltet, wie auch die Gerade g. Stelle für diese Ebene die Koordinatenform auf und überprüfe, ob wirklich $P \in E$ erfüllt ist.

a) $P(2, 3, 0),\ g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $P(4, 1, 0),\ g : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $P(2,3,0)$, $\quad g: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + \lambda\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}}_{\vec{a}}$



$$\vec{AP} = \begin{pmatrix}2-1\\3-2\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-4\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}0 & 1\\3 & 1\end{matrix}$$

$$E: \begin{pmatrix}-7\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$-7\cdot(x-1) + 4\cdot(y-2) - 3(z-1) = 0$$

$$-7x + 4y - 3z + 7 - 8 + 3 = 0$$

$$E: -7x + 4y - 3z + 2 = 0$$

Kontrolle:

$$-7\cdot 2 + 4\cdot 3 - \cancel{3\cdot 0} + 2 \overset{?}{=} 0$$

$$-14 + 12 + 2 = 0 \; \checkmark$$

$$\Rightarrow P \in E$$

b) $P(4,1,0)$, $\quad g: \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{OA}} - \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{a}}$ $\qquad \vec{AP} = \begin{pmatrix}4-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ 1 \\ 1\end{matrix} \times \begin{matrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \\ 4 \\ 1\end{matrix} = \begin{pmatrix}-1-1\\4+1\\1-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$-2\cdot(x-0) + 5\cdot(y-0) - 3\cdot(z-1) = 0$$

$$E: -2x + 5y - 3z + 3 = 0$$

Kontrolle:

$$-2\cdot 4 + 5\cdot 1 - \cancel{3\cdot 0} + 3 \overset{?}{=} 0$$

$$-8 + 5 + 3 = 0 \checkmark$$

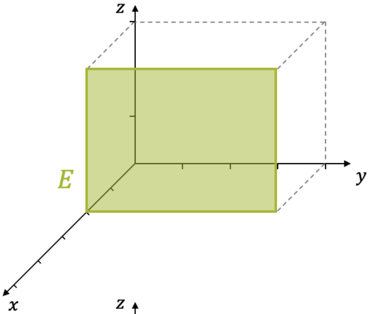
$$\Rightarrow P \in E$$

Gleichung einer Ebene (5049)

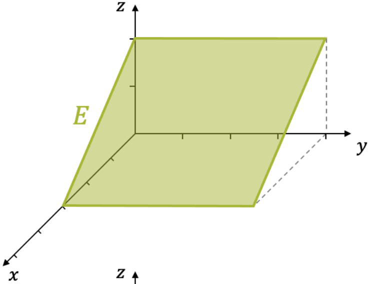
Aufgabe 3

Aufgabe 3 Finde die Koordinatenform der folgenden Ebenen.

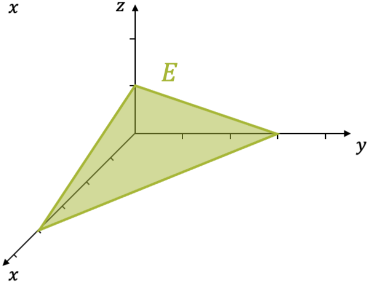
a)



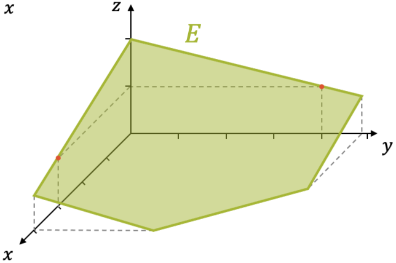
b)



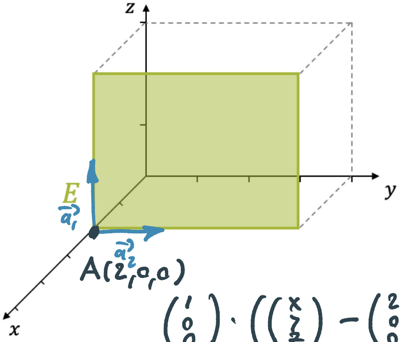
c)



d)



a)



$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

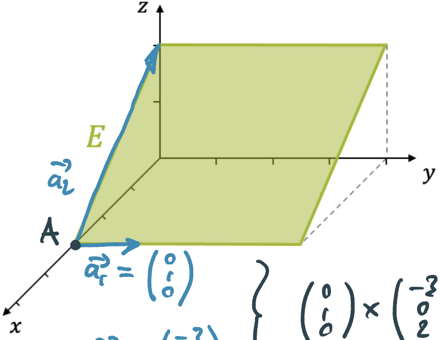
$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

wähle: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad 1 \cdot (x-2) = 0$$

$$\underline{E: x - 2 = 0}$$

b)



$\vec{a_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{a_2} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \vec{n}$$

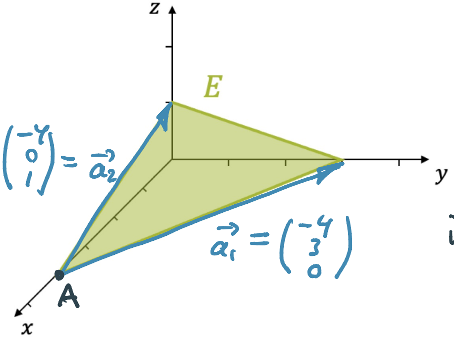
$$\begin{matrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \right) = 0$$

$$2 \cdot (x-3) + 3 \cdot z = 0$$

$$\underline{E:\ 2x + 3z - 6 = 0}$$

c)



$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$$

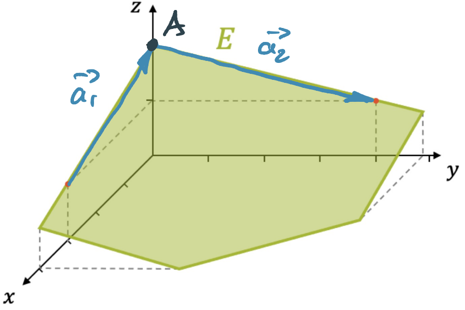
$$\begin{matrix}-4 & \quad & -4\\ 3 & \quad & 0\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \right) = 0$$

$$3 \cdot (x-4) + 4y + 12z = 0$$

$$\underline{E: 3x + 4y + 12z - 12 = 0}$$

d)



$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -3 & & 0 \\ 0 & & 4 \end{matrix}$$

wähle: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$4x + 3y + 12 \cdot (z-2) = 0$$

$$\underline{E: 4x + 3y + 12z - 24 = 0}$$

Gleichung einer Ebene (5049)

Aufgabe 4

Aufgabe 4 Die zwei Geraden spannen zusammen eine Ebene auf.
Zeige zuerst, dass dem so ist und stelle dann eine Parameterform dieser Ebenen auf.

a) $g_1 : \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; g_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \; g_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

a)

$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{0A_1}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a_1}} \qquad g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{0A_2}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$$

nicht kollinear

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0+5 \\ 1-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \overrightarrow{A_1A_2}] = \vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$$

→ komplanar

→ nicht windschief

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

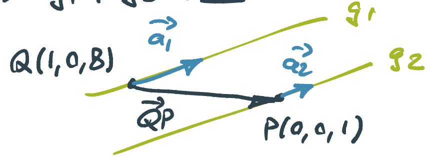
$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} \qquad g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \rightarrow \underline{\text{kollinear}} \quad g_1 \parallel g_2$$

$$\begin{aligned} x&: \quad 1 + 2s = 0 \longrightarrow 1 + 0 \overset{ϟ}{=} 0 \\ y&: \quad 4s = 0 \longrightarrow s = 0 \\ z&: \quad 8 + 8s = 1 \longrightarrow 8 + 0 \underset{ϟ}{=} 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(0,0,1) \in g_2$ aber $P \notin g_1$

$\Rightarrow g_1 \neq g_2$ (nicht identisch)



$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gleichung einer Ebene (5049)

Aufgabe 5

Aufgabe 5 Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind windschief. Verschiebe die Gerade g_2 parallel und zwar so, dass sie mit g_1 in einer Ebene liegt. Finde dann die drei Formen der Ebenendefinition.

$$g_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a_1}} \qquad g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$$

$A \in E$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 3 \\ 7 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -7 \\ 3 \end{array} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9+49 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 58 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 58 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

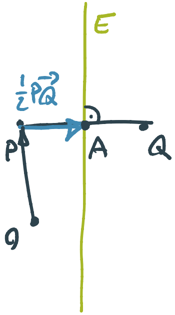
$$(-3) \cdot x - 7y + 58 \cdot (z-1) = 0$$

$$E: -3x - 7y + 58z - 58 = 0$$

Gleichung einer Ebene (5049)

Aufgabe 6

Aufgabe 6 Finde die Punktemenge, die zu den beiden Punkten $P(-1,-1,-2)$ und $Q(5,3,4)$ den gleichen Abstand haben. Mache anschliessend eine Skizze im dreidimensionalen Koordinatensystem mit den beiden Punkten P und Q, sowie der gefundenen Punktmenge.



$$\vec{OA} = \vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{PQ}$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5+1 \\ 3+1 \\ 4+2 \end{pmatrix}}_{\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ -1+2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow A(2,1,1)$

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$3 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-1) + 3 \cdot (z-1) = 0$$

$$3x + 2y + 3z - 6 - 2 - 3 = 0$$

$$\underline{E: 3x + 2y + 3z - 11 = 0}$$

$E: \; 3x + 2y + 3z - 11 = 0$

x-Achse: $y = z = 0$

in E: $3x + \cancel{2 \cdot 0} + \cancel{3 \cdot 0} - 11 = 0$

$3x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

y-Achse: $x = z = 0$

in E: $\cancel{3 \cdot 0} + 2y + \cancel{3 \cdot 0} - 11 = 0$

$2y = 11 \rightarrow y = \frac{11}{2} = 5.5$

z-Achse: $x = y = 0$

in E: $3z - 11 = 0$

$\rightarrow z = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$